VETORES DE UM PLANO

MARCELO DIAS PASSOS

Resumo. Estas notas são revisões de notas de aulas digitadas durante os cursos de MATB34 (Geometria Analítica e Álgebra Vetorial) em 2021 (semestres 2021.1 e 2021.2).

Tomemos um vetor não-nulo $\vec{u}$. Já observamos que os múltiplos de $\vec{u}$ são exatamente os vetores paralelos a $\vec{u}$. Se $\vec{v}$ também é não-nulo e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, qual a "posição relativa" de $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$? Se $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, então $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = (\alpha + \beta\lambda)\vec{u}$, que é paralelo a $\vec{u}$. Portanto, se $\vec{v}//\vec{u}$, conclui-se que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ será paralelo a $\vec{u}$.

Sejam então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $\vec{u}\nparallel\vec{v}$. Como convencionamos que o vetor nulo é paralelo a todo e qualquer vetor, deduzimos $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$. Fixemos um ponto arbitrário O e sejam $A = O + \vec{u}$ e $B = O + \vec{v}$. Dado que $\vec{u}\nparallel\vec{v}$, O, A e B **não** estão alinhados e determinam um único plano que chamaremos de π. Portanto, se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$O + \alpha\vec{u} \in \overleftrightarrow{OA} \subseteq \pi, \quad O + \beta\vec{v} \in \overleftrightarrow{OB} \subseteq \pi \quad \text{ e também } \quad P = O + (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \in \pi.$$

Portanto $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, ou seja, $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ admite um representante que tem origem e extremidade em π.

A discussão acima inspira as próximas definições:

Definição 1. *Sejam $\vec{u}$ um vetor, r uma reta e π um plano. Diremos que:*

(1) $\vec{v}//r$ se, e somente se, existem $A, B \in r$ tais que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, e

(2) $\vec{v}//\pi$, se e somente se, existem $C, D \in \pi$ tais que $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$.

Teorema 1. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $\vec{u}\nparallel\vec{v}$.*

(1) Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, $\alpha = 0 = \beta$,

(2) Para $\gamma, \delta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\gamma\vec{u} + \delta\vec{v} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ se, e somente se, $\gamma = \lambda$ e $\delta = \mu$, e

(3) Seja π um plano tal que $\vec{u}//\pi$ e $\vec{v}//\pi$. Para $\vec{w}$, vetor

$$\vec{w}//\pi \text{ se, e somente se, } \vec{w} = \gamma\vec{u} + \delta\vec{v} \text{ para únicos } \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. (1) Suponhamos que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sendo assim, $\alpha\vec{u} = -\beta\vec{v}$. Se $\alpha \neq 0$, também $\beta \neq 0$. Logo $\vec{u}, \alpha\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesma direção, o que é uma contradição pois $\vec{u}\nparallel\vec{v}$. Portanto $\alpha = 0 = \beta$. A recíproca é imediata!
(2) Suponhamos que $\gamma\vec{u} + \delta\vec{v} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, $\gamma, \delta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Logo

$$\vec{0} = \big(\gamma\vec{u} + \delta\vec{v}\big) - \big(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\big) = (\gamma - \lambda)\vec{u} + (\delta - \mu)\vec{v}.$$

Pelo item anterior, $\gamma - \lambda = 0 = \delta - \mu$, ou seja, $\gamma = \lambda$ e $\delta = \mu$.
(3) Fixemos $O, P \in \pi$ tais que $\vec{w} = \overrightarrow{OP}$. Sejam $A = O + \vec{u}$ e $B = O + \vec{v}$. Pelo ponto P tracemos a reta t, que é paralela à reta $\overleftrightarrow{OA}$. Como t é paralela a $\overleftrightarrow{OA}$, então $\overleftrightarrow{OB}\nparallel\overleftrightarrow{OA}$ e consequentemente t encontra $\overleftrightarrow{OB}$, digamos no ponto Q. Sendo assim, $\overrightarrow{OQ} = \delta\vec{v}$, para algum $\delta \in \mathbb{R}$, e $\overrightarrow{QP} = \gamma\vec{u}$, para algum $\gamma \in \mathbb{R}$. Sendo assim,

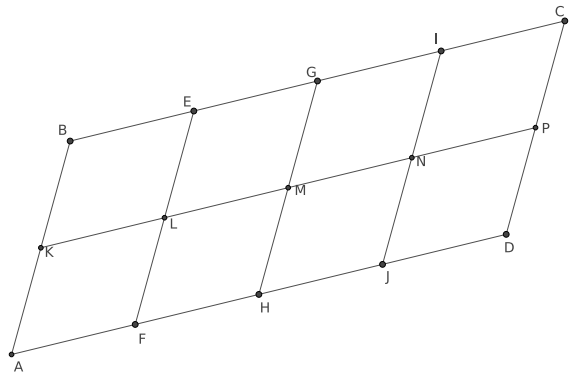
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \gamma\vec{u} + \delta\vec{v}.$$

□

Definição 2. *Sejam π um plano e $\mathbb{V}^2$ o conjunto dos vetores paralelos a π. Uma dupla $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ é chamada de **base para** $\mathbb{V}^2$ se, e somente se, $\vec{e_1}, \vec{e_2} \in \mathbb{V}^2$ e $\vec{e_1}\nparallel\vec{e_2}$.*

*Dado $\vec{u} \in \mathbb{V}^2$, a dupla $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$ é chamada de **dupla de coordenadas do vetor $\vec{u}$ com relação à base** $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$. Se $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$, escreveremos $\vec{u} = (x, y)_{\mathcal{B}}$ para denotar a situação. O escalar x será chamado de **coordenada de $\vec{u}$ na direção $\vec{e_1}$** enquanto y **é a coordenada de $\vec{u}$ na direção $\vec{e_2}$**.*

Date: 2024.



Exercício 1. *Determine as coordenadas dos vetores abaixo com relação à base* $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}\right)$.

(1) $\vec{0}$	*(8)* $\overrightarrow{NC}$	*(15)* $\overrightarrow{MB}$	*(22)* $\overrightarrow{MI}$
(2) $\overrightarrow{AF}$	*(9)* $\overrightarrow{LJ}$	*(16)* $\overrightarrow{MC}$	*(23)* $\overrightarrow{MJ}$
(3) $\overrightarrow{AB}$	*(10)* $\overrightarrow{EH}$	*(17)* $\overrightarrow{MD}$	*(24)* $\overrightarrow{MK}$
(4) $\overrightarrow{AC}$	*(11)* $\overrightarrow{EP}$	*(18)* $\overrightarrow{ME}$	*(25)* $\overrightarrow{ML}$
(5) $\overrightarrow{AK}$	*(12)* $\overrightarrow{EN}$	*(19)* $\overrightarrow{MF}$	*(26)* $\overrightarrow{MM}$
(6) $\overrightarrow{HF}$	*(13)* $\overrightarrow{JE}$	*(20)* $\overrightarrow{MG}$	*(27)* $\overrightarrow{MN}$
(7) $\overrightarrow{DH}$	*(14)* $\overrightarrow{MA}$	*(21)* $\overrightarrow{MH}$	*(28)* $\overrightarrow{MP}$

Exercício 2. *As coordenadas dos vetores abaixo são em relação à mesma base* $\mathcal{B}$ *da questão anterior. Apresente os vetores apenas usando os pontos da figura.*

(1) $(1,1)$ *(3)* $(1,-1)$ *(5)* $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ *(7)* $(-2,1)$ *(9)* $\left(-3,\frac{1}{2}\right)$ *(11)* $(4,1)$
(2) $(-1,1)$ *(4)* $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ *(6)* $(2,-1)$ *(8)* $(-2,0)$ *(10)* $\left(4,\frac{1}{2}\right)$ *(12)* $\left(-4,\frac{1}{2}\right)$

Teorema 2. *Seja* $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ *uma base para* $\mathbb{V}^2$. *Se* $\vec{u} = (a,b)_{\mathcal{B}}$, $\vec{v} = (x,y)_{\mathcal{B}}$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *então*

$$\vec{u} + \vec{v} = (a+x, b+y)_{\mathcal{B}} \qquad e \qquad \lambda\vec{u} = (\lambda a, \lambda b)_{\mathcal{B}}.$$

Demonstração. Suponhamos que $\vec{u} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}$ e $\vec{v} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$. Portanto:

(1) $\vec{u} + \vec{v} = \left(a\vec{e_1} + b\vec{e_2}\right) + \left(x\vec{e_1} + y\vec{e_2}\right) = (a+x)\vec{e_1} + (b+y)\vec{e_2}$, enquanto
(2) $\lambda\vec{u} = \lambda(a\vec{e_1} + b\vec{e_2}) = (\lambda a)\vec{e_1} + (\lambda b)\vec{e_2}$.

□

Exercício 3. *Dados os vetores* $\vec{u} = (-3,4)$ *e* $\vec{v} = (1,2)$, *determinar:*

(1) $3\vec{u} + 2\vec{v}$ *(2)* $2\vec{v} - 3\vec{u}$ *(3)* $-3\vec{u}$ *(4)* $\frac{1}{5}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}$ *(5)* $\frac{-\vec{u}+3\vec{v}}{2}$ *(6)* $\frac{3\vec{u}}{5}$

Exercício 4. *Dados os vetores* $\vec{u} = (2,-3)$ *e* $\vec{v} = (-1,4)$, *determinar* $3\vec{u} + 2\vec{v}$ *e* $3\vec{u} - 2\vec{v}$.

Exercício 5. *Determinar o vetor* $\vec{x}$ *na igualdade de* $\vec{x} + 2\vec{u} = \frac{\vec{v}}{2} - \vec{x}$, *dados* $\vec{u} = (3,-1)$ *e* $\vec{v} = (-2,4)$.

Exercício 6. *Encontrar os números* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tais que* $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, *onde* $\vec{a} = (10,2)$, $\vec{b} = (-1,2)$ *e* $\vec{v} = (11,0)$.

Proposição 3. *Nas mesmas condições do teorema anterior,*

$$\vec{u} /\!/ \vec{v} \quad \textit{se, e somente se,} \quad \begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Demonstração. Suponhamos que $\vec{u} /\!/ \vec{v}$ e, sem perda de generalidade, $\vec{v} \neq \vec{0}$. Sendo assim, $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Pelo teorema anterior, conclui-se que $a = \alpha x$ e $b = \alpha y$. Logo

$$\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = ay - bx = (\alpha x)y - (\alpha y)x = 0 \ .$$

Agora suponhamos que $ay = bx$. Se $x = 0 = y$, então $\vec{v} = \vec{0}$ e portanto $\vec{u} /\!/ \vec{v}$. Sem perda de generalidade, seja $x \neq 0$. Logo $b = \left(\frac{a}{x}\right) y$ e

$$\left(\frac{a}{x}\right)\vec{v} = \left(\frac{a}{x}\right)(x,y)_{\mathcal{B}} = \left(\frac{ax}{x}, \frac{ay}{x}\right)_{\mathcal{B}} = (a,b)_{\mathcal{B}} = \vec{u} \ .$$

Sendo assim, $\vec{u} /\!/ \vec{v}$. □

Observação 1 (Baricentro de um triângulo)**.** *Seja* ΔABC *um triângulo e sejam* M, N *e* P *os pontos médios dos lados* $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ *e* $\overline{AB}$, *respectivamente. Sendo assim, os segmentos* $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ *e* $\overline{CP}$ *são chamadas* ***medianas*** *de* ΔABC. *Uma vez que* $\overrightarrow{AB} \not\parallel \overrightarrow{AC}$, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ *é uma base para os vetores paralelos ao plano determinado por* A, B *e* C. *Sendo assim:*

(1) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}}$,
(2) $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2} = \left(-1, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}}$, *e*
(3) $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} - \overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{2}, -1\right)_{\mathcal{B}}$.

Observamos que:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Portanto $\overrightarrow{AM} \not\parallel \overrightarrow{BN}$ *e a reta* $\overleftrightarrow{AM}$ *encontra* $\overleftrightarrow{BN}$ *em um ponto que chamaremos de* G*. Dado que* G *é ponto de* $\overleftrightarrow{AM}$*, concluímos que* $\overrightarrow{AG} // \overrightarrow{AM}$*. Suponhamos que* $\overrightarrow{AG} = (x, y)_{\mathcal{B}}$*. Pela proposição anterior,*

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & x \\ \frac{1}{2} & y \end{vmatrix} = \frac{y}{2} - \frac{x}{2} = \frac{y - x}{2}.$$

Portanto $x = y$*. Por outro lado,* $\overrightarrow{BG} // \overrightarrow{BN}$*. Uma vez que* $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} = (-1, 0)_{\mathcal{B}} + (x, x)_{\mathcal{B}} = (x - 1, x)_{\mathcal{B}}$ *e*

$$0 = \begin{vmatrix} -1 & x - 1 \\ \frac{1}{2} & x \end{vmatrix} = -x - \frac{x - 1}{2} = \frac{1 - 3x}{2}.$$

Logo $x = \frac{1}{3}$ *e*

(1) $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)_{\mathcal{B}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$*,*
(2) $\overrightarrow{BG} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)_{\mathcal{B}} = \frac{2}{3}\left(-1, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$*, e*
(3) $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG} = (0, -1)_{\mathcal{B}} + \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)_{\mathcal{B}} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)_{\mathcal{B}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}, -1\right)_{\mathcal{B}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$*.*

Concluímos que G ***é ponto de encontro das três medianas e este ponto divide cada mediana na razão 2 para 1****.*

Agora veremos teorema que determina relação entre as coordenadas de um mesmo vetor com relação a duas bases de $\mathbb{V}^2$.

Definição 3. *Sejam* $\mathcal{B} = \left(\vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ *e* $\mathcal{C} = \left(\vec{f_1}, \vec{f_2}\right)$ *bases para* $\mathbb{V}^2$*. Se* $\vec{f_1} = (a, b)_{\mathcal{B}}$ *e* $\vec{f_2} = (c, d)_{\mathcal{B}}$*, a matriz*

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

é chamada de ***matriz de mudança de base de*** $\mathcal{B}$ ***para*** $\mathcal{C}$*.*

Como base é sempre par de vetores não paralelos, vale o seguinte resultado:

Corolário 1. *Toda matriz de mudança de base é inversível.*

Demonstração. Uma matriz de mudança de base tem como colunas as coordenadas de vetores não paralelos. Pela proposição 3, essa matriz tem determinante não nulo e portanto será inversível. □

Teorema 4 (Mudança de base)**.** *Nas mesmas condições da definição, se* M *é a matriz de mudança de base de* $\mathcal{B}$ *para* $\mathcal{C}$*, então*

$$M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ,$$

para todo $\vec{v} = (x, y)_{\mathcal{B}} = (u, v)_{\mathcal{C}}$*.*

Demonstração. Fixemos $\vec{v} = (x, y)_{\mathcal{B}} = (u, v)_{\mathcal{C}}$. Logo

$$\vec{v} = u\vec{f_1} + v\vec{f_2} = u(a, b)_{\mathcal{B}} + v(c, d)_{\mathcal{B}} = \left(au + cv, bu + dv\right)_{\mathcal{B}} .$$

Pela unicidade das coordenadas com relação a $\mathcal{B}$, deduzimos que $x = au + cv$ e $y = bu + dv$, ou seja,

$$M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + cv \\ bu + dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

□

Exercício 7. *Ache as coordenadas de* $\overrightarrow{HL}$ *e* $\overrightarrow{HN}$ *com relação à base* $\mathcal{B}$ *(do exercício 1) e mostre que* ***não*** *são paralelos. Determine as coordenadas dos vetores abaixo com relação à base* $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{HL}, \overrightarrow{HN}\right)$*.*

(1) $\vec{0}$ *(3)* $\overrightarrow{AB}$ *(5)* $\overrightarrow{AK}$ *(7)* $\overrightarrow{DH}$ *(9)* $\overrightarrow{LJ}$ *(11)* $\overrightarrow{EP}$ *(13)* $\overrightarrow{JE}$ *(15)* $\overrightarrow{MB}$ *(17)* $\overrightarrow{MD}$
(2) $\overrightarrow{AF}$ *(4)* $\overrightarrow{AC}$ *(6)* $\overrightarrow{HF}$ *(8)* $\overrightarrow{NC}$ *(10)* $\overrightarrow{EH}$ *(12)* $\overrightarrow{EN}$ *(14)* $\overrightarrow{MA}$ *(16)* $\overrightarrow{MC}$ *(18)* $\overrightarrow{ME}$

Exercício 8. *Sejam* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ *bases de* $\mathbb{V}^2$*. Se* M *é a matriz de mudança de base de* $\mathcal{B}$ *para* $\mathcal{C}$*, mostre que* M^{-1} *é a matriz de mudança de base de* $\mathcal{C}$ *para* $\mathcal{B}$*.*

1. Ortogonalidade. Produto Escalar

Definição 4. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não-nulos. Chamaremos de* ***medida angular entre*** $\vec{u}$ ***e*** $\vec{v}$ *a medida do ângulo $A\widehat{O}B$, onde O é um ponto, $A = O + \vec{u}$ e $B = O + \vec{v}$. Denotaremos esse número por* $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$.

Nas mesmas condições da definição, se P é um ponto, $Q = P + \vec{u}$ e $R = P + \vec{v}$, então o ângulo $Q\widehat{P}R$ é congruente ao $A\widehat{O}B$. Portanto o cálculo de $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$ não depende dos representantes de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$ usados. Ainda,

$$0 \leq \text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi.$$

Facilmente observa-se que $\vec{u}$ é paralelo a $\vec{v}$ se, e somente se, $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ou $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$.

Exercício 9. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não-nulos. Mostre que:*

(1) $\text{ang}(-\vec{u}, \vec{v}) = \pi - \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$, *e*
(2) se $\vec{u} /\!/ \vec{v}$, então:
  (a) $\vec{u}$ tem mesmo sentido que $\vec{v}$ se, e somente se, $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, *e*
  (b) $\vec{u}$ tem sentido contrário ao de $\vec{v}$ se, e somente se, $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$.

Exercício 10. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não-nulos e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ambos não nulos. Escreva* $\text{ang}(\alpha\vec{u}, \beta\vec{v})$ *em função de* $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$, *$\alpha$ e β.*

Definição 5. *Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, diremos que $\vec{u}$* ***é ortogonal a*** $\vec{v}$ *se, e somente se, um deles é nulo ou ambos são não-nulos e* $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$. *Denotaremos essa relação por " $\vec{u} \perp \vec{v}$ ".*

Exercício 11. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não-nulos e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ambos não nulos. Mostre que $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, $\alpha\vec{u} \perp \beta\vec{v}$.*

Proposição 5. *Para $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores, $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.*

Demonstração. Observamos que a equivalência é verdadeira para o caso em que $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$. Suponhamos $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$.

Tomemos um ponto A e sejam $B = A + \vec{u}$ e $C = B + \vec{v}$. Sendo assim, $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$. Os pontos A, B e C são os vértices de um triângulo. Observamos que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ se, e somente se, ΔABC é triângulo retângulo com ângulo reto em $A\widehat{B}C$, ou seja, se, e somente se, $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$. Pelo exercício 11, sabe-se que $-\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u} \perp \vec{v}$. □

Definição 6. *Diremos que uma base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ é* ***ortogonal*** *se, e somente se, $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$. A base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ será dita* ***ortonormal*** *se, e somente se, for ortogonal e $\vec{e_1}$ e $\vec{e_2}$ forem unitários.*

Corolário 2. *Se $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ é uma base ortogonal, então $\left(\frac{\vec{e_1}}{\|\vec{e_1}\|}, \frac{\vec{e_2}}{\|\vec{e_2}\|}\right)$ é base ortonormal.* □

Teorema 6. *Seja $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ uma base ortonormal. Se $\vec{u} = (x, y)_{\mathcal{B}}$, então $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

Demonstração. Suponhamos que $\vec{u} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$. Como $x\vec{e_1} \perp y\vec{e_2}$, pela proposição 5, inferimos que

$$\|\vec{u}\|^2 = \|x\vec{e_1}\|^2 + \|y\vec{e_2}\|^2.$$

Dado que $\vec{e_1}$ e $\vec{e_2}$ são unitários, $\|x\vec{e_1}\|^2 = x^2$ e $\|y\vec{e_2}\|^2 = y^2$. Logo $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. □

Exercício 12. *Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1)$ e $\vec{v} = (-3, 4)$, calcular:*

(1) $\|\vec{u}\|$ *(2)* $\|\vec{v}\|$ *(3)* $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ *(4)* $\|2\vec{u} - \vec{v}\|$

Exercício 13. *Calcular os valores de a para que o vetor $\vec{u} = (a, -2)$ tenha módulo 4.*

Exercício 14. *Calcular os valores de a para que o vetor $\vec{v} = \left(a, \frac{1}{2}\right)$ seja unitário (i.e., ter norma 1).*

Teorema 7. *Seja $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ uma base ortonormal. Se $\vec{u} = (a, b)_{\mathcal{B}} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} = (x, y)_{\mathcal{B}} \neq \vec{0}$, então*

$$\cos\left(\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})\right) = \frac{ax + by}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

Demonstração. Seja $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$.

Suponhamos que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. Como $a = \lambda x$ e $b = \lambda y$, induzimos que:

$$\frac{ax + by}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{(\lambda x)x + (\lambda y)y}{|\lambda| \cdot \|\vec{v}\|^2} = \frac{\lambda(x^2 + y^2)}{|\lambda| \cdot \|\vec{v}\|^2} = \frac{\lambda}{|\lambda|}.$$

Se $\lambda > 0$, então $\theta = 0$ e $\frac{ax+by}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = 1 = \cos 0$. Caso $\lambda < 0$, conclui-se que $\theta = \pi$ e $\frac{ax+by}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = -1 = \cos\pi$. Portanto o corolário é válido quando $\vec{u} /\!/ \vec{v}$.

Suponhamos que $\vec{u} \not/\!/ \vec{v}$ e sejam A um ponto, $B = A + \vec{u}$ e $C = A + \vec{v}$. Fica determinado o triângulo ΔABC e o lado $\overline{BC}$ é oposto ao ângulo $B\widehat{A}C$. Pela **Lei dos Cossenos**,

$$\left\|\overline{BC}\right\|^2 = \left\|\overline{AC}\right\|^2 + \left\|\overline{AB}\right\|^2 - 2 \cdot \left\|\overline{AC}\right\| \cdot \left\|\overline{AB}\right\| \cdot \cos\theta \ .$$

Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = (x - a, y - b)_{\mathcal{B}}$,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \left(x^2 + y^2\right) + \left(a^2 + b^2\right) - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta \ .$$

Ou seja,

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = ax + by \ ,$$

e conclui-se a tese. □

Observação 2. *A partir de agora, salvo disposição em contrário, todos os vetores estarão escritos com relação a uma base ortonormal pré-fixada. Sendo assim, deixaremos de fazer menção à base quando apresentarmos as coordenadas de qualquer vetor.*

Definição 7. *Sejam $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (x, y)$. O número " $ax + by$ " – denotado $\vec{u} \bullet \vec{v}$ – será o* ***produto escalar (ou produto interno) de $\vec{u}$ por $\vec{v}$.***

Corolário 3. *Nas mesmas condições da definição, $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.*

Demonstração. Suponhamos $\vec{u} \perp \vec{v}$. Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, concluímos que $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$. Se $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$, pelo teorema anterior,

$$0 = \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|},$$

ou seja, $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

Agora suponhamos $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$. Caso $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, naturalmente $\vec{u} \perp \vec{v}$. Se $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$, pelo teorema anterior,

$$\cos\left(\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})\right) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = 0.$$

Dado que $0 \leq \text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi$, então $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$. □

Exercício 15. *Sejam O, A e B três pontos não-alinhados. Mostre que:*

(1) o ângulo $A\hat{O}B$ é ângulo ***agudo*** *se, e somente se, $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} > 0$.*

(2) o ângulo $A\hat{O}B$ é ângulo ***obtuso*** *se, e somente se, $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} < 0$.*

Pergunta-se: o que acontece se $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = 0$?

Exercício 16. *Determine $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$ para os casos:*

(1) $\vec{u} = (1, 0)$ e $\vec{v} = (1, 1)$ *(2) $\vec{u} = (1, 0)$ e $\vec{v} = (-1, -1)$* *(3) $\vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $\vec{v} = (-1, 0)$*

Exercício 17. *Determinar o valor de k para que os vetores $\vec{u} = (-2, 3)$ e $\vec{v} = (k, -4)$ sejam:*

(1) paralelos *(2) ortogonais*

Exercício 18. *Sejam $\vec{u} = (\sqrt{3}, 1)$ e $\vec{v} = (1, k)$. Determinar o valor de k para que:*

(1) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam paralelos,

(2) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonais, e

(3) a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja de $\frac{\pi}{6}$.

Exercício 19. *Determinar o valor de a para que seja de $\frac{\pi}{4}$ o ângulo entre $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (1, a)$.*

Exercício 20. *Determinar o valor de a para que seja de $\frac{3\pi}{4}$ o ângulo entre $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (1, a)$.*

Proposição 8. *Para $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, vetores, e $\alpha \in \mathbb{R}$,*
(1) $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$,
(2) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{u} \bullet \vec{w} + \vec{v} \bullet \vec{w}$,
(3) $(\alpha \vec{u}) \bullet \vec{v} = \alpha(\vec{u} \bullet \vec{v})$,
(4) $\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$,
(5) $\vec{u} \bullet \vec{u} = 0$ *se, e somente se* $\vec{u} = \vec{0}$; *e*
(6) se $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$, *então* $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\big(\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})\big)$. □

Demonstração. Suponhamos $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ e $\vec{w} = (e, f)$. Logo
(1) $\vec{u} \bullet \vec{v} = ac + bd = ca + db = \vec{v} \bullet \vec{u}$.
(2) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w} = (a + c)e + (b + d)f = (ae + bf) + (ce + df) = \vec{u} \bullet \vec{w} + \vec{v} \bullet \vec{w}$.
(3) $(\alpha \vec{u}) \bullet \vec{v} = (\alpha a, \alpha b) \bullet (c, d) = (\alpha a)c + (\alpha b)d = \alpha(ac + bd) = \alpha(\vec{u} \bullet \vec{v})$.
(4) $\vec{u} \bullet \vec{u} = a^2 + b^2 = \|\vec{u}\|^2$.
(5) $\vec{u} \bullet \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.
(6) Pelo teorema 7. □

Corolário 4 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores, $|\vec{u} \bullet \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$. E vale a igualdade se, e somente se, $\vec{u} // \vec{v}$.*

Demonstração. Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $|\vec{u} \bullet \vec{v}| = 0 = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ e ainda $\vec{u} // \vec{v}$. Suponhamos $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$. Pelo último item da proposição anterior,

$$|\vec{u} \bullet \vec{v}| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \Big|\cos\big(\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})\big)\Big| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| .$$

Além do mais,

$$|\vec{u} \bullet \vec{v}| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \Big|\cos\big(\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})\big)\Big| = 1 \Leftrightarrow \text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) \in \{0, \pi\} \ .$$

Portanto, vale a igualdade se, e somente se, $\vec{u} // \vec{v}$. □

Exercício 21. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores. Mostre que:*
(1) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,(\vec{u} \bullet \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2$. *(2)* $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Corolário 5 (Desigualdade Triangular)**.** *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores, então $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.*

Demonstração. Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, $\vec{u} \bullet \vec{v} \leq |\vec{u} \bullet \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$. Pelo exercício anterior:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u} \bullet \vec{u} + 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{v} \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\,\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = \big(\,\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|\,\big)^2 \ .$$

Sendo assim, $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$. □

Exercício 22. *Mostre que, para $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores, $\big|\,\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|\,\big| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$.*

Exercício 23. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores ambos não nulos. Mostre que são equivalentes:*
(1) $\vec{u} // \vec{v}$ *e têm mesmo sentido,* *(2)* $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ *e* *(3)* $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \big|\,\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|\,\big|$
Apresente equivalências análogas a estas para o fato de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serem paralelos de sentidos contrátrios.

Exercício 24. *Para $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores, mostre as seguintes identidades*

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\,\|\vec{u}\|^2 + 2\,\|\vec{v}\|^2 \qquad e \qquad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4(\vec{u} \bullet \vec{v}) \ .$$

Exercício 25. *Mostre que um paralelogramo $ABCD$ tem diagonais perpendiculares se, e somente se, é um* ***losango****.*

Exercício 26. *Sejam O, A e B três pontos não-alinhados, $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{b} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Mostre que o vetor $\vec{b} \neq \vec{0}$ e que é paralelo à bissetriz do ângulo $A\widehat{O}B$.*

Proposição 9. *Seja $\vec{u} = (a, b)$ um vetor. Para $\vec{v}$, vetor, $\vec{v} \perp \vec{u}$ se, e somente se, $\vec{v} // (-b, a)$.*

Demonstração. Se $\vec{v} = (x, y)$, então

$$\vec{v} \perp \vec{u} \Leftrightarrow ax + by = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -b \\ y & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} // (-b, a) \ .$$

□

Definição 8. *Para o vetor $\vec{u} = (a, b)$, definimos o vetor $\vec{u}^{\perp} = (-b, a)$.*

Proposição 10. *Para $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores, e $\alpha \in \mathbb{R}$:*

(1) $\left\|\vec{u}^{\perp}\right\| = \|\vec{u}\|$,
(2) $\left(\vec{u}^{\perp}\right)^{\perp} = -\vec{u}$,
(3) $(\vec{u} + \vec{v})^{\perp} = \vec{u}^{\perp} + \vec{v}^{\perp}$, *e*
(4) $(\alpha\vec{u})^{\perp} = \alpha\vec{u}^{\perp}$.

Demonstração. Suponhamos $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$. Logo:
(1) $\left\|\vec{u}^{\perp}\right\| = \|(-b, a)\| = \sqrt{b^2 + a^2} = \|\vec{u}\|$.
(2) $\left(\vec{u}^{\perp}\right)^{\perp} = (-b, a)^{\perp} = (-a, -b) = -\vec{u}$.
(3) $(\vec{u} + \vec{v})^{\perp} = (a + c, b + d)^{\perp} = (-b - d, a + c) = (-b, a) + (-d, c) = \vec{u}^{\perp} + \vec{v}^{\perp}$.
(4) $(\alpha\vec{u})^{\perp} = (\alpha a, \alpha b)^{\perp} = (-\alpha b, \alpha a) = \alpha(-b, a) = \alpha\vec{u}^{\perp}$. □

Corolário 6. *Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\left(\vec{u}, \vec{u}^{\perp}\right)$ é base ortogonal. Se ainda, $\vec{u}$ é unitário, $\left(\vec{u}, \vec{u}^{\perp}\right)$ é base ortonormal.* □

Exercício 27. *Se $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, mostre que* $(a, b)^{\perp} \bullet (x, y) = \begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix}$.

Tomemos um vetor $\vec{v}$ não-nulo. Fixado um vetor $\vec{u}$, gostaríamos de escrever $\vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$, onde $\vec{u_1} // \vec{v}$ e $\vec{u_2} \perp \vec{v}$. Sendo assim, $\vec{u_1} = \lambda\vec{v}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\vec{u_2} = \vec{u} - \vec{u_1}$ e $\vec{u_2} \bullet \vec{v} = 0$, vale

$$0 = \vec{v} \bullet (\vec{u} - \lambda\vec{v}) = \vec{v} \bullet \vec{u} - \lambda \|\vec{v}\|^2 \ .$$

Ou seja, $\lambda = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$. Sendo assim $\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v}$ é paralelo a $\vec{v}$ e $\vec{u} - \left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{v}$.

Definição 9. *Seja $\vec{v} \neq \vec{0}$. Dado o vetor $\vec{u}$, **a projeção ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$** é o vetor $\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v}$, que será denotado por* $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$.

Proposição 11. *Sejam $\vec{v}$, $\vec{u}$ e $\vec{w}$, vetores, e $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $\vec{v} \neq \vec{0}$. Então:*

(1) $\text{proj}_{\vec{v}}(\alpha\vec{u}) = \alpha\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$,
(2) $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u} + \vec{w}) = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} + \text{proj}_{\vec{v}}\vec{w}$,
(3) se $\mu \neq 0$, então $\text{proj}_{(\mu\vec{v})}\vec{u} = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$,
(4) $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{0}$ *se, e somente se,* $\vec{u} \perp \vec{v}$, *e*
(5) $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{u}$ *se, e somente se,* $\vec{u} // \vec{v}$.

Demonstração. (1) $\text{proj}_{\vec{v}}(\alpha\vec{u}) = \left(\frac{(\alpha\vec{u}) \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v} = \left(\frac{\alpha(\vec{u} \bullet \vec{v})}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v} = \alpha\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v} = \alpha\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$.
(2) $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u} + \vec{w}) = \left(\frac{(\vec{u}+\vec{w}) \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v} = \left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{w} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v} = \left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} + \frac{\vec{w} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v} = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} + \text{proj}_{\vec{v}}\vec{w}$.
(3) Suponhamos $\mu \neq 0$. Daí

$$\text{proj}_{(\mu\vec{v})}\vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \bullet (\mu\vec{v})}{\|\mu\vec{v}\|^2}\right)(\mu\vec{v}) = \mu\left(\frac{\mu(\vec{u} \bullet \vec{v})}{\mu^2\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v} = \left(\frac{\mu^2(\vec{u} \bullet \vec{v})}{\mu^2\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v} = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} \ .$$

(4) Como $\vec{v} \neq \vec{0}$,

$$\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \ .$$

(5) Suponhamos $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{u}$. Dado que $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} // \vec{v}$, então $\vec{u} // \vec{v}$. Agora suponhamos $\vec{u} = \beta\vec{v}$, para algum $\beta \in \mathbb{R}$. Daí, pelo item (1)

$$\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \text{proj}_{\vec{v}}(\beta\vec{v}) = \beta\text{proj}_{\vec{v}}\vec{v} = \beta\left(\frac{\vec{v} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v} = \beta\vec{v} = \vec{u} \ .$$

□

Exercício 28. *Encontrar a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, para os casos:*
(1) $\vec{u} = (1, 1)$ *e* $\vec{v} = (2, 5)$ *(2)* $\vec{u} = (1, 0)$ *e* $\vec{v} = (4, 3)$ *(3)* $\vec{u} = (4, 3)$ *e* $\vec{v} = (1, 2)$

Exercício 29. *Sejam $\vec{v}$ e $\vec{u}$ vetores e suponhamos $\vec{v} \neq \vec{0}$. Mostre que* $\|\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}\| = \frac{|\vec{u} \bullet \vec{v}|}{\|\vec{v}\|}$. *Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, mostre que ainda* $\|\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}\| = \|\vec{u}\| \cdot \left|\cos\left(\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})\right)\right|$.

Exercício 30. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, vetores. Ache fórmula para $\|\vec{u} - \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}\|$ em função de $\|\vec{u}\|$ e $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$. Como ficaria em função de $\|\vec{v}\|$ e $\vec{u} \bullet \vec{v}$?*

Exercício 31. *Seja ΔABC um triângulo e suponha que $\overrightarrow{AB} = (a, b)$ e $\overrightarrow{AC} = (x, y)$. Determine fórmula para a área de ΔABC.*

Proposição 12. *Seja $(\vec{u}, \vec{v})$ uma base ortogonal. Então $\vec{w} = \text{proj}_{\vec{u}}\vec{w} + \text{proj}_{\vec{v}}\vec{w}$, para todo vetor $\vec{w}$.*

Demonstração. Fixemos um vetor $\vec{w}$. Uma vez que $(\vec{u}, \vec{v})$ é base, existem únicos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tais que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Como $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$,

$$\vec{w} \bullet \vec{v} = \left(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\right) \bullet \vec{v} = \beta \|\vec{v}\|^2 \ .$$

Sendo assim, $\beta = \frac{\vec{w} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$ e $\beta\vec{v} = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{w}$. Analogamente, $\alpha\vec{u} = \text{proj}_{\vec{u}}\vec{w}$ e concluímos a demonstração. □

Exercício 32. *Seja $\vec{v}$ um vetor não nulo. Mostre que $\vec{u} = \frac{\left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right)\vec{v} + \left(\vec{u} \bullet \vec{v}^{\perp}\right)\vec{v}^{\perp}}{\|\vec{v}\|^2}$, para todo vetor $\vec{u}$.*

Exercício 33. *Seja $(\vec{u}, \vec{v})$ uma base ortonormal. Mostre que, $\vec{w} = (\vec{w} \bullet \vec{u})\vec{u} + (\vec{w} \bullet \vec{v})\vec{v}$, para todo vetor $\vec{w}$.*

Exercício 34. *Seja $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{V}^2$ que é ortonormal. Sejam $\mathcal{C} = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$ também uma base de $\mathbb{V}^2$ e M a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$. Descreva as entradas da matriz $M^t M$.*

Exercício 35. *Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases de $\mathbb{V}^2$ e seja M a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$. Suponha que $\mathcal{B}$ é ortonormal. Mostre que $\mathcal{C}$ é ortonormal se, e somente se, $M^t M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Exercício 36. *Seja $M \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $M^t M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mostre que existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. Mostre ainda que $MM^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*